Journal of Pure and Applied Algebra 37 (1985) 1-25
North-Holland

SUR LA RESOLUTION INJECTIVE MINIMALE DE L'ALGEBRE ENVELOPPANTE D'UNE ALGEBRE DE LIE RESOLUBLE

G. BAROU et M.P. MALLIAVIN
10 Rue Saint Louis et L'Ile, 75004 Paris, France

Communicated by H. Bass
Received 20 April 1984

Introduction

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble de dimension finie sur un corps k de caractéristique 0. En [12] J.L. Koszul construit un $\mathfrak{g}$-module noté $V(\mathfrak{g})$ dans le but de prouver que toutes les classes de $H^p(\mathfrak{g}, M)$, $p>0$, M un $\mathfrak{g}$-module de dimension finie, sont effaçables. Nous prouvons (§3) que, si le corps k est algébriquement clos, $V(\mathfrak{g})$ est un module injectif sur l'algèbre enveloppante $A=U(\mathfrak{g})$; plus précisément, $V(\mathfrak{g})$ est isomorphe au dernier terme d'une résolution injective minimale du A-module à gauche A.

On utilise la description donnée en [15] des modules de la résolution injective minimale de A et aussi des lemmes d'algèbre homologique non commutative (§2) qui sont des variantes de ceux obtenus par G. Barou [1]. D'autre part, nous montrons que le dernier terme E_n de la résolution injective minimale du A-module à gauche A est muni d'une structure naturelle de bimodule et que E_n est isomorphe à $V(\mathfrak{g})$ comme A-module à gauche et comme A-module à droite (§4). Ainsi $V(\mathfrak{g})$ apparait comme dernier terme des résolutions injectives minimales du A-module à gauche A et du A-module à droite A.

1. Le module $V(A)$

Soit A une algèbre associative unitaire sur un corps k. Un élément u d'un A-module à gauche M est dit de *caractère fini* (cf. [12]) si le sous-module de M qu'il engendre est de dimension finie sur k. Pour que $u \in M$ soit de caractère fini, il faut et il suffit que son annulateur, i.e. l'idéal à gauche des $a \in A$ tels que $au=0$, soit de codimension finie dans A; il revient au même de dire que cet annulateur contient un idéal bilatère de codimension finie. Il est facile de vérifier que les éléments de caractère fini de M constituent un sous-module de M et si M et N sont deux A-modules et $h: M \to N$ une application A-linéaire, l'image par h d'un élément de caractère fini de M est un élément de caractère fini de N.

Proposition 1.1. *Si l'anneau A est noethérien à gauche et si le produit de deux idéaux à gauche de A de codimension finie est encore de codimension finie, alors le foncteur σ, qui à un A-module à gauche M associe le sous-module de ses éléments de caractère fini, est un 'idempotent kernel functor' au sens de* [10].

Preuve. Il est clair que σ est un sous-foncteur de l'identité. Il suffit donc de vérifier que σ est exact à gauche, ce qui ne présente pas de difficulté, et que $\sigma(M/\sigma(M))=0$ pour tout A-module à gauche M. En effet soit $\bar{y}\in\sigma(M/\sigma(M))$ alors $y\in M$ et il existe un idéal bilatère I de A, de codimension finie, tel que $Iy\subseteq\sigma(M)$; l'anneau A étant noethérien à gauche, il existe un système fini de générateurs $a_1,\dots,a_n$ de l'idéal à gauche I. Donc $a_iy\in\sigma(M)$, $i=1,\dots,n$. Soient I_i, $i=1,\dots,n$, des idéaux bilatères de codimension finie de A tels que $I_ia_iy=(0)$. L'idéal $I'=I_1\cap\cdots\cap I_n$ est aussi de codimension finie, puisqu'il contient le produit $I_1\cdots I_n$, et $I'a_iy=(0)$ pour $i=1,\dots,n$. Donc $I'Iy=0$ et $I'I$ est de codimension finie. $\square$

L'hypothèse faite sur A en 1.1 est satisfaite si A est l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie de dimension finie sur un corps, d'après 2.5.1 de [9]. Lorsque les hypothèses de 1.1 sont satisfaites, il est facile de vérifier que σ est naturellement équivalent au foncteur $\varinjlim_I \operatorname{Hom}_A(A/I,-)$, où I parcourt les idéaux bilatères de A de codimension finie et aussi que H_σ^m, le m-ième dérivé droit du foncteur σ, et $\varinjlim_I \operatorname{Ext}_A^m(A/I,-)$ sont équivalents; de plus H_σ^m commute aux limites directes.

Nous noterons $V(A)$ le sous-module $\sigma(\operatorname{Hom}_k(A,k))$ de $\operatorname{Hom}_k(A,k)$, sur lequel la structure de A-module à gauche est définie par: $(a\cdot f)(b)=f(ba)$ si $a,b\in A$ et f est une application k-linéaire de A dans k. Donc $V(A)$ est le A-module à gauche des applications k-linéaires de A dans k qui sont nulles sur un idéal bilatère de codimension finie de A.

Lorsque A est l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie résoluble $\mathfrak{g}$ sur k, le module $V(A)$ a été introduit par J.L. Koszul; il sera noté, comme dans [12], $V(\mathfrak{g})$. Nous utiliserons le lemme suivant (Lemme 7 de [12]).

Lemme 1.2. *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble de dimension finie sur un corps k de caractéristique nulle, $\mathfrak{B}=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ l'idéal dérivé de $\mathfrak{g}$, $N=U(\mathfrak{g})\mathfrak{B}=\mathfrak{B}U(\mathfrak{g})$ l'idéal bilatère de $U(\mathfrak{g})$ engendré par $\mathfrak{B}$. Pour p entier positif, notons C_p l'espace des applications k-linéaires de $U(\mathfrak{g})$ dans k qui s'annulent sur N^p et posons $V_p(\mathfrak{g})=C_p\cap V(\mathfrak{g})$. Alors $V(\mathfrak{g})=\bigcup_{p\geq 0}V_p(\mathfrak{g})$.*

Jusqu'à la fin du paragraphe, nous supposerons que l'algèbre A satisfait les hypothèses de 1.1. Si I est un idéal bilatère de codimension finie de A, tous les idéaux I^r, $r\geq 0$, sont aussi de codimension finie. Si M est un A-module, les éléments de M dont l'annulateur contient un idéal de la forme I^r sont dits *de caractère I-nilpotent* et on notera $W(I)$ le sous-module des éléments de caractère I-nilpotent de $\operatorname{Hom}_k(A,k)$: c'est un module à gauche sur A formé des applications k-linéaires de A dans k qui sont nulles sur un idéal de la forme I^k.

Proposition 1.3. *Soit (I_i) la famille des idéaux bilatères maximaux de A. Si les I_j commutent entre eux, le A-module $V(A)$ est somme directe des $W(I_j)$.*

Preuve. Sans hypothèses de commutation sur les I_j, il est facile de voir que $W(I_i) \subset V(A)$ pour tout i et que la somme $\sum W(I_i)$ est directe; en effet soit $f \in W(I_{i_0})$ et $f \in \sum_{i \neq i_0} W(I_i)$. Alors $f(I_{i_0}^t) = 0$ et $f = f_1 + \cdots + f_r$ où $f_i(I_i^{s_i}) = 0$, $i = 1, \ldots, r$, $i \neq i_0$. On peut supposer que $s_1 = \cdots = s_r = s$ et par suite $f(I_1^s \cdots \hat{I}_{i_0} \cdots I_r^s) = 0$. Les idéaux $I_{i_0}^t$ et $I_1^s \cdots \hat{I}_{i_0} \cdots I_r^s$ étant co-premiers, i.e. $I_{i_0}^t + I_1^s \cdots \hat{I}_{i_0} \cdots I_r^s = A$, il s'en suit que $f(A) = 0$, d'où $f = 0$. Supposons que les I_j commutent entre eux et soit $f \in V(A)$. Alors $f(J) = 0$ où J est un idéal bilatère, de codimension finie, de A. Si $I_1, \ldots, I_s$ sont les idéaux maximaux de A qui contiennent I, il existe t tel que $(I_1 \cap \cdots \cap I_s)^t \subset J$. D'où $I_1^t \cdots I_s^t \subseteq J$. Les s idéaux $I_1^t \cdots \hat{I}_j^t \cdots I_s^t$, $j = 1, \ldots, s$, étant co-premiers dans leur ensemble, il existe $a_j \in I_1^t \cdots \hat{I}_j^t \cdots I_s^t$, $j = 1, \ldots, s$, tels que $1 = a_1 + a_2 + \cdots + a_s$. D'où $f = a_1 \cdot f + \cdots + a_s \cdot f$ et $(a_j \cdot f)(I_j^t) = f(I_j^t a_j) = 0$. Donc $f \in \sum_i W(I_i)$. □

Corollaire 1.4. *Si A est un anneau de polynômes sur un corps k algébriquement clos, $V(A) = \coprod W(I)$ où I parcourt les idéaux maximaux de A et $W(I)$ est l'enveloppe injective du A-module $A/I \cong k$.*

Preuve. La première partie résulte de 1.3. Pour la seconde, on se ramème, par un changement de coordonnées, au cas où I est l'idéal d'augmentation de A et le résultat est démontré dans [14, Théorème 3.3] et aussi dans [17]. □

2. Foncteurs sur les A-modules

On notera dans la suite, A un anneau noethérien à gauche, ${}_A\mathbf{Mod}$ la catégorie des A-modules à gauche de type fini. Enfin **Ab** désignera la catégorie des groupes abéliens.

Les deux lemmes suivants sont démontrés en [1, Lemmes 3.3, 3.5 et 3.6].

Lemme 2.1. *Soient A un anneau, I un idéal bilatère de A et M un A/I-module à gauche. Si $m \in M$, on note $\varepsilon_m : A/I \to M$ le A-homomorphisme qui envoie $\bar{1}$ en m. Soit T le foncteur $\mathrm{Ext}_A^j(-, A)$ de ${}_A\mathbf{Mod}$ dans* **Ab**, *j entier ≥ 0 fixé. Si l'on munit $T(A/I) = \mathrm{Ext}_A^j(A/I, A)$ de la structure de A-module à gauche provenant de la structure de A-module à droite de A/I, on a, pour tout $m \in M$, $a \in A$ et $x \in T(M)$,*

$$[T(\varepsilon_{am})](x) = a[(T(\varepsilon_m))(x)].$$

Preuve. Considérons une résolutions de A par des A-modules à gauche injectifs:

$$0 \to A \to E_0 \xrightarrow{d_0} E_1 \xrightarrow{d_1} E_2 \to \cdots.$$

Les morphismes de complexes

$$\psi^{\cdot}_m : \mathrm{Hom}_A(M, E.) \to \mathrm{Hom}_A(A/I, E.)$$

et

$$\psi^{\cdot}_{am} : \mathrm{Hom}_A(M, E.) \to \mathrm{Hom}_A(A/I, E.)$$

définis en degré j par: $\psi^j_m(g) = g \circ \varepsilon_m$ et $\psi^j_{am}(g) = g \circ \varepsilon_{am}$ où $g \in \mathrm{Hom}_A(M, \varepsilon_j)$ sont liés par la relation $\psi^j_{am}(g) = a\psi^j_m(g)$, car si $\bar{b} \in A/I$, on a $\psi^j{}_{am}(g)(\bar{b}) = (g \circ \varepsilon_{am})(\bar{b}) = g(bam)$ et $(a\psi^j_m(g))(\bar{b}) = \psi^j_m(g)(\bar{b}a) = (g \circ \varepsilon_m)(\bar{b}a) = g(bam)$. La relation précédente passe à l'homologie pour donner la relation annoncée. □

Lemme 2.2. *Soit A un anneau, T un foncteur additif contravariant de ${}_A\mathbf{Mod}$ dans $\mathbf{Ab}$. On suppose $T(A)$ muni d'une structure de A-module à gauche satisfaisant la condition (P_∞) suivante:*

(P_∞) Pour tout A-module M et tout $m \in M$ on a

$$T(\varepsilon_{am})(y) = a[T(\varepsilon_m)](y)$$

quels que soient $y \in T(M)$ et $a \in A$ et où $\varepsilon_m : A \to M$ est le morphisme qui envoie 1 en m. Alors:

(1) *En posant $[\bar{\phi}(M)(x)](m) = T(\varepsilon_m)(x)$ pour tout A-module à gauche M, $m \in M$ et $x \in T(M)$, on définit un morphisme fonctoriel:*

$$\bar{\phi} : T \Rightarrow \mathrm{Hom}_A(-, T(A)).$$

(2) *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *La restriction de T est un foncteur exact à gauche de ${}_A\mathbf{Mod}^{\mathrm{f}}$ vers* $\mathbf{Ab}$.

(ii) *Pour tout A-module à gauche M de type fini, $\bar{\phi}(M)$ est un isomorphisme.*

(3) *Si les conditions* (2) *sont réalisées alors $T : {}_A\mathbf{Mod}^{\mathrm{f}} \to \mathbf{Ab}$ est exact si et seulement si $T(A)$ est un A-module à gauche injectif.*

Preuve. Cf. Lemmes 3.5 et 3.6 de [1] (loc. cit.). C'est une version non commutative de Lemmes 4.1 et 4.2 de [11]. □

Définition 2.3. Soit $\mathscr{F}$ une famille d'idéaux bilatères de A vérifiant les conditions suivantes:

(i) Si $I \in \mathscr{F}$ et si J est un idéal bilatère de A contenant I, alors $J \in \mathscr{F}$.

(ii) Si I et $J \in \mathscr{F}$ alors $IJ \in \mathscr{F}$.

On notera ${}_A\mathbf{Mod}^{\mathscr{F}}$ la sous-catégorie de ${}_A\mathbf{Mod}^{\mathrm{f}}$ dont les objets sont les A-modules dont l'annulateur appartient à $\mathscr{F}$. C'est évidemment une sous-catégorie épaisse de ${}_A\mathbf{Mod}^{\mathrm{f}}$.

Si $T : {}_A\mathbf{Mod}^{\mathscr{F}} \Rightarrow \mathbf{Ab}$ est un foncteur additif contravariant on dira que T est *compatible avec* $\mathscr{F}$ s'il vérifie les deux conditions suivantes:

(a) Pour tout $I \in \mathscr{F}$, $T(A/I)$ est muni d'une structure de A-module à gauche de sorte que si $I' \subseteq I$, $I' \in \mathscr{F}$, l'image par T du morphisme canonique $A/I' \to A/I$ est A-linéaire.

(b) Pour les structures précédentes et pour tout $I\in\mathcal{F}$, T vérifie la propriété (P_I) suivante:

(P_I) Si $M\in {}_A\mathbf{Mod}^{\mathcal{F}}$ et si $IM=(0)$, on a

$$T(\varepsilon^I_{am})(x)=a[T(\varepsilon^I_m)(x)]$$

quels que soient $m\in M$, $a\in A$, $x\in T(M)$, où ε^I_m désigne le morphisme de A/I dans M qui envoie $\bar{1}$ en m.

Les conditions de la définition précédente sont vérifiées si A est l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de dimension finie sur un corps (de caractéristique 0) k, si l'on prend pour $\mathcal{F}$ la famille des idéaux bilatères de codimension finie de A (alors ${}_A\mathbf{Mod}^{\mathcal{F}}$ est la catégorie des représentations de dimension finie de $\mathfrak{g}$) et si $T=\mathrm{Ext}^j_A(-,A)$, j entier ≥ 0, ceci d'après le Lemme 2.1.

Le lemme suivant est démontré dans un cas particulier par [1] (loc. cit. Lemme 3.7), la démonstration de [1] étant directement adaptable.

Lemme 2.4. *Soient A un anneau, $\mathcal{F}$ une famille d'idéaux bilatères de A, $T:{}_A\mathbf{Mod}^{\mathcal{F}}\Rightarrow\mathbf{Ab}$ un foncteur additif contravariant compatible avec $\mathcal{F}$. Posons $E=\varinjlim_{\mathcal{F}} T(A/I)$ et j_I le morphisme canonique de $T(A/I)$ dans E. Alors il existe un morphisme fonctoriel $\phi:T\Rightarrow\mathrm{Hom}_A(-,E)$ tel que si $M\in{}_A\mathbf{Mod}^{\mathcal{F}}$ et si $IM=(0)$, $I\in\mathcal{F}$, on a*

$$[\phi(M)(y)](x)=(j_I\circ T(\varepsilon^I_x))(y)$$

quels que soient $x\in M$, $y\in T(M)$, ε^I_x désignant le morphisme de A/I dans M qui envoie $\bar{1}$ en x.

Preuve. Soit $M\in{}_A\mathbf{Mod}^{\mathcal{F}}$ et soit $I\in\mathcal{F}$ tel que $IM=(0)$. Pour $x\in M$, $y\in T(M)$ on pose:

$$[\phi(M)(y)](x)=(j_I\circ T(\varepsilon^I_x))(y).$$

Cette expression est indépendante de l'idéal I de $\mathcal{F}$ vérifiant $IM=(0)$. En effet si $JM=(0)$ alors $(I\cap J)M=(0)$ et on peut supposer $J\subseteq I$. Alors $j_I=j_I\circ j_{I,J}$ où $j_{I,J}:T(A/I)\to T(A/J)$ est le morphisme $T(\alpha_{I,J})$ où $\alpha_{I,J}:A/J\to A/I$ est la surjection canonique. Donc $\varepsilon^I_x\circ\alpha_{I,J}=\varepsilon^J_x$ et par suite $T(\alpha_{I,J})\circ T(\varepsilon^I_x)=T(\varepsilon^J_x)=j_{I,J}\circ T(\varepsilon^I_x)$. Il en résulte que

$$j_I\circ T(\varepsilon^I_x)=j_J\circ T(\varepsilon^J_x).$$

D'autre part, en raison de la propriété (P_I) vérifiée par T, l'application $\phi(M)(y)$ de M dans E est A-linéaire; on a donc $\phi(M)(y)\in\mathrm{Hom}_A(M,E)$ pour $y\in T(M)$. De plus si $f:N\to M$ est un morphisme de ${}_A\mathbf{Mod}^{\mathcal{F}}$ il est facile de vérifier que le diagramme:

$$\begin{tikzcd}
T(N) \arrow[r, "T(f)"] \arrow[d, "\phi(N)"'] & T(M) \arrow[d, "\phi(M)"] \\
\mathrm{Hom}_A(N,E) \arrow[r, "f\circ -"'] & \mathrm{Hom}_A(M,E)
\end{tikzcd}$$

est commutatif, car en considérant un idéal $I \in \mathcal{F}$ tel que $IM = (0)$, $IN = (0)$, on a, pour tout $z \in T(N)$ et tout $x \in M$,

$$\begin{aligned}\phi(M)(T(f)z)(x) &= (j_I \circ T(\varepsilon_x^I))(T(f)z) = (j_I \circ T(f \circ \varepsilon_x^I))(z)\\ &= (j_I \circ T(\varepsilon_{f(x)}^I))(z) = \phi(N)(z)(f(x)).\end{aligned}$$

Corollaire 2.5. *Soient A et $\mathcal{F}$ comme en 2.4 et soit T un foncteur additif contravariant ${}_A\mathbf{Mod}^{\mathrm{f}} \Rightarrow \mathbf{Ab}$. On suppose que la restriction de T à ${}_A\mathbf{Mod}^{\mathcal{F}}$ vérifie les conditions suivantes:*

(i) *elle est exacte à gauche;*

(ii) *elle est compatible avec $\mathcal{F}$;*

(iii) *on a $IT(A/I) = (0)$ pour tout $I \in \mathcal{F}$.*

Soient $E = \varinjlim_{\mathcal{F}} T(A/I)$ et $\phi : T \Rightarrow \mathrm{Hom}_A(-, E)$ le morphisme fonctoriel défini en 2.4. Alors $\phi(M)$ est un isomorphisme pour tout $M \in {}_A\mathbf{Mod}^{\mathcal{F}}$.

Preuve. On adapte facilement le Lemme 3.8 de [1] à la situation présente. Soit $I \in \mathcal{F}$. Pour tout (A/I)-module à gauche de type fini N, on peut définir $T(N)$. On obtient ainsi par restriction un foncteur additif et contravariant de ${}_{A/I}\mathbf{Mod}^{\mathrm{f}}$ dans $\mathbf{Ab}$ que l'on notera $\bar{T}_I$. Puisque T est compatible avec $\mathcal{F}$, $\bar{T}_I$ vérifie la condition (P_∞) du Lemme 2.2. Puisque A/I est noethérien à gauche et que $\bar{T}_I$ est exact à gauche, on déduit du Lemme 2.2, un morphisme fonctoriel:

$$\bar{\phi}_I : \bar{T}_I \Rightarrow \mathrm{Hom}_{A/I}(-, \bar{T}_I(A/I))$$

où $[\bar{\phi}_I(M)(x)](m) = \bar{T}_I(\varepsilon_m)(x)$ si M est un (A/I)-module à gauche, $x \in T(M)$ et $\varepsilon_m : A/I \to M$, $m \in M$, est l'application $\varepsilon_m(\bar{1}) = m$ et $\bar{\phi}_I(M)$ est un isomorphisme si M est un A-module de type fini. Pour tout $M \in {}_A\mathbf{Mod}^{\mathrm{f}}$ tel que $IM = (0)$ on peut donc définir un isomorphisme:

$$\bar{\phi}_I(M) : \bar{T}_I(M) = T(M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{A/I}(M, T(A/I)) = \mathrm{Hom}_A(M, T(A/I)).$$

Si ϕ est le morphisme fonctoriel défini en 2.4, on a, pour $x \in T(M)$ *et* $y \in M$,

$$[\phi(M)(x)](y) = (j_I \circ T(\varepsilon_y^I))(x) = j_I[(\bar{\phi}_I(M)(x))(y)]$$

par définition de $\bar{\phi}_I$; d'où

$$\phi(M)(x) = j_I \circ \bar{\phi}_I(M)(x).$$

Puisque T est exact à gauche sur ${}_A\mathbf{Mod}^{\mathcal{F}}$, les morphismes canoniques $T(A/I) \to T(A/J)$, où I, $J \in \mathcal{F}$, $J \subseteq I$, sont injectifs. Donc les morphismes j_I sont aussi injectifs. Par conséquent et puisque $\bar{\phi}_I(M)$ est un isomorphisme, $\phi(M)$ est injectif.

Vérifions que $\phi(M)$ est surjectif; soit $g \in \mathrm{Hom}_A(M, E)$; puisque M est de type fini et que E est l'union des $T(A/I)$, $I \in \mathcal{F}$, il existe $J \in \mathcal{F}$ tel que $g(M) \subset T(A/J)$; donc g se factorise à travers j_J et il existe $h \in \mathrm{hom}_A(M, T(A/J))$ tel que $g = j_J \circ h$; de plus, on peut choisir J dans l'annulateur de M. Soit $\bar{\phi}_J$ le morphisme qui en résulte. Puisque $\bar{\phi}_J(M)$ est un isomorphisme, il existe $x \in T(M)$ tel que $\bar{\phi}_J(M)(x) = h$; d'où $\phi(M)(x) = j_I \circ h = g$. $\square$

Définition 2.6. Soit $\mathscr{F}$ une famille d'idéaux bilatères de A satisfaisant à:

(i) si $I \in \mathscr{F}$ et si $I \subseteq J$, où J est un idéal bilatère de A, alors $J \in \mathscr{F}$,

(ii) si I et $J \in \mathscr{F}$, alors $IJ \in \mathscr{F}$.

On dira que $\mathscr{F}$ satisfait la *condition d'Artin–Rees* si pour tout A-module à gauche noethérien N, tout sous-module M de N et tout $I \in \mathscr{F}$, il existe J dans $\mathscr{F}$ tel que $JN \cap M \subseteq IM$.

Si l'anneau A est noethérien à gauche, cette condition est équivalente à la suivante: pour tout idéal à gauche K de A et tout $I \in \mathscr{F}$ il existe $J \in \mathscr{F}$ tel que $J \cap K \subseteq IK$; en effet, dans un sens, l'implication est triviale; il suffit de faire $M = K$ et $N = A$. Dans l'autre sens on raisonne par récurrence sur le nombre minimal de générateurs de N, utilisant (ii), et le cas d'un générateur étant couvert par la condition sur les idéaux à gauche.

Si $A = U(\mathfrak{g})$, où $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie résoluble de dimension finie sur un corps k de caractéristique 0, la famille $\mathscr{F}$ des idéaux bilatères de A de codimension finie satisfait la condition d'Artin–Rees. Lorsque k est algébriquement clos cela provient d'un analogue, pour la dimension de Gelfand–Kirillov, du Théorème 3.2 de [7], analogue qui se démontre de la même manière en changeant simplement 'dimension de Krull' en 'dimension de Gelfand–Kirillov' et que nous énoncerons comme suit:

Théorème 2.7. *Soit M un $U(\mathfrak{g})$-module de type fini, où $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie résoluble de dimension finie sur un corps k de caractéristique* 0 *algébriquement clos. Supposons que* $\mathrm{GK.dim}(U(\mathfrak{g})/\mathrm{Ann}(M)) = m$ *et soit X une extension essentielle de type fini de M. Alors* $\mathrm{GK.dim}(U(\mathfrak{g})/\mathrm{Ann}\, X) = m$.

Il résulte alors en conservant les notations du Théorème 2.7 que si $\mathrm{Ann}\, M$ est un idéal de codimension finie, alors pour toute extension essentielle de type fini X de M, $\mathrm{Ann}\, X$ est de codimension finie.

On déduit alors du Théorème 2.7, par une démonstration analogue à celle du Corollaire 2.8 de [18].

Proposition 2.8. *Soient k un corps de caractéristique* 0. $\mathfrak{g}$ *une k-algèbre de Lie résoluble de dimension finie, $A = U(\mathfrak{g})$, N un A-module à gauche de type fini et M un sous-module de N. Alors, si I est un idéal bilatère de A, de codimension finie, il existe un idéal bilatère de codimension finite J de A tel que $JN \cap M \subseteq IM$.*

Preuve. La famille $\mathscr{S} = \{N';\ N'$ sous-module de N tel que $N' \cap M = IM\}$ est non vide, puisque $IM \in \mathscr{S}$. Comme N est noethérien, $\mathscr{S}$ possède un élément maximal, soit N_0'. Si $IM = M$, on a $JN \cap M \subset M = IM$ pour tout idéal J. Supposons $IM \neq M$; alors N/N_0' est extension essentielle de $M/IM = M/(N_0' \cap M) \simeq (M + N_0')/N_0'$; en effet supposons que Q soit un sous-module de N, tel que $N_0' \subseteq Q$ et $(Q/N_0') \cap$

$(M+N_0')/N_0'=(\bar{0})$ dans N/N_0'. Alors $Q\cap(M+N_0')\subseteq N_0'$. Donc $Q\cap M\subseteq N_0'\cap M=IM$ et $N_0'\cap M=IM\subseteq Q\cap M$ de façon évidente; donc $Q\cap M=IM$ et $Q\in\mathscr{S}$. Vu le caractère maximal de N_0' on a $Q=N_0'$. Donc $Q/N_0'=(\bar{0})$. D'après les remarques précédants le Théorème 2.7 on voit qu'il existe un idéal bilatère de codimension finie J de A tel que $J(N/N_0')=(\bar{0})$. Donc $JN\subseteq N_0'$ et $JN\cap M\subseteq N_0'\cap M=IM$.

On passe ensuite au cas où le corps k est quelconque. Si $\bar{k}$ est une clôture algébrique de k, I un idéal bilatère de codimension finie de $A=U(\mathfrak{g})$ et K un idéal à gauche de A, il existe un idéal bilatère $\bar{J}$ de codimension finie sur $\bar{k}$ tel que $\bar{J}\cap(\bar{k}\otimes K)\subseteq\bar{k}\otimes IK$. Cette inclusion subsiste si on remplace $\bar{k}$ par l'extension finie de k engendrée par les éléments de $\bar{k}$ qui apparaissent dans un système de générateurs de $\bar{J}$. On a alors $\bar{J}\cap(k_1\otimes K)\subseteq k_1\otimes IK$. D'où $(A\cap\bar{J})\cap K\subseteq(k_1\otimes IK)\cap A=IK$ et $A\cap\bar{J}$ est de codimension finie sur k dans A. □

Proposition 2.9. *Soient A un anneau, $\mathscr{F}$ une famille d'idéaux bilatères de A satisfaisant la condition d'Artin–Rees et E un A-module à gauche tel que $E=\bigcup_{I\in\mathscr{F}}\mathrm{Ann}_E(I)$ et $\mathrm{Hom}_A(-,E)$ est un foncteur exact sur la catégorie ${}_A\mathbf{Mod}^{\mathscr{F}}$. Alors le A-module E est injectif.*

Preuve. Soit J un idéal à gauche de A et $f:J\to E$ un A-homomorphisme. Il s'agit d'étendre f à A tout entier. On peut évidemment supposer que $J\neq(0)$. Le sous-module $f(J)$ de E est de type fini, puisque A est noethérien à gauche; d'autre part $f(J)$ étant contenu dans $E=\bigcup_{I\in\mathscr{F}}\mathrm{Ann}_E(I)$, on a aussi $f(J)=\bigcup_{I\in\mathscr{F}}\mathrm{Ann}_{f(J)}(I)$. Donc il existe $I\in\mathscr{F}$ tel que $I\,f(J)=(0)$. D'après la condition d'Artin–Rees vérifiée par $\mathscr{F}$ on peut trouver un idéal $I'\in\mathscr{F}$ tel que:

$$I'\cap J\subseteq IJ$$

et donc $f(I'\cap J)=(0)$. Soit $p:J\to J/(I'\cap J)$ l'homomorphisme canonique. Alors f se factorise à travers p et il existe $f_1:J/(I'\cap J)\to E$ tel que $f=f_1\circ p$. Appliquons $\mathrm{Hom}_A(-,E)$ à la suite exacte de ${}_A\mathbf{Mod}^{\mathscr{F}}$ suivante:

$$0\to J/(I'\cap J)\xrightarrow{g}A/I'\to A/(J+I')\to 0,$$

on obtient la suite exact de A-modules à gauche:

$$\mathrm{Hom}_A(A/I',E)\to\mathrm{Hom}_A(J/(I'\cap J),E)\to 0.$$

Donc il existe $f_2:A/I'\to E$ tel que $f_2\circ g=f_1$. Soit $\bar{f}$ la composée de f_2 et de la surjection canonique $A\to A/I'$. Alors $\bar{f}:A\to E$ et $\bar{f}|_J=f$. □

Corollaire 2.10. *Soient A un anneau noethérien à gauche, $\mathscr{F}$ une famille d'idéaux bilatères de A satisfaisant la condition d'Artin–Rees, T un foncteur additif contravariant ${}_A\mathbf{Mod}^{\mathrm{f}}\Rightarrow\mathbf{Ab}$. On suppose que la restriction de T à ${}_A\mathbf{Mod}^{\mathscr{F}}$ vérifie les conditions suivantes:*

(i) *elle est exacte à gauche;*
(ii) *elle est compatible avec $\mathscr{F}$;*
(iii) *on a: $IT(A/I)=(0)$ pour tout $I\in\mathscr{F}$.*

Alors les conditions suivantes sont équivalentes:
(1) *le foncteur* $T: {}_A\mathbf{Mod}^{\mathscr{F}} \Rightarrow \mathbf{Ab}$ *est exact;*
(2) *le A-module à gauche* $E = \varinjlim_{\mathscr{F}} T(A/I)$ *est injectif.*

Preuve. Puisque, d'après 2.5, $T: {}_A\mathbf{Mod}^{\mathscr{F}} \Rightarrow \mathbf{Ab}$ est naturellement équivalent à $\mathrm{Hom}_A(-, E)$, il suffit de prouver que (1) entraîne (2). Mais $E = \varinjlim_{\mathscr{F}} T(A/I)$ coïncide évidemment avec $\bigcup_{I \in \mathscr{F}} \mathrm{Ann}_E(I)$. Donc si $\mathrm{Hom}_A(-, E) \sim T$ est exact, il résulte de 2.9 que E est injectif.

Proposition 2.11. *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie résoluble de dimension finie n sur un corps k de caractéristique* 0, $A = U(\mathfrak{g})$ *et* $T = \mathrm{Ext}_A^n(-, A)$. *Alors T est naturellement équivalent, sur la catégorie* ${}_A\mathbf{Mod}^{\mathscr{F}}$, *à* $\mathrm{Hom}_A(-, E)$ *où* $E = \varinjlim_I \mathrm{Ext}_A^n(A/I, A)$, *lorsque I parcourt les idéaux bilatères de codimension finie de A, et E est un A-module injectif.*

Preuve. Le foncteur T est additif contravariant de ${}_A\mathbf{Mod}^{\mathrm{f}}$ dans $\mathbf{Mod}_A$. Soit $\mathscr{F}$ la famille des idéaux bilatères de codimension finie de A; elle vérifie la condition d'Artin–Rees. D'autre part, on vérifie facilement que la restriction de T à ${}_A\mathbf{Mod}^{\mathscr{F}}$ est un foncteur exact, qu'elle est compatible avec $\mathscr{F}$ et que $IT(A/I) = (0)$ pour tout $I \in \mathscr{F}$. Il résulte de 2.10 que $E = \varinjlim_I \mathrm{Ext}_A^n(A/I, A)$ est injectif et de 2.5 que T est équivalent à $\mathrm{Hom}_A(-, E)$, sur la catégorie ${}_A\mathbf{Mod}^{\mathscr{F}}$.

3. Le dernier terme de la résolution injective minimale de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie résoluble

Nous utiliserons le résultat vraisemblablement bien connu, de la proposition suivante.

Proposition 3.1. *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie résoluble de dimension finie sur un corps k de caractéristique* 0. *Soit P un idéal premier de codimension finie de* $U(\mathfrak{g})$. *Alors* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset P$.

Preuve. Il résulte des hypothèses que P est un idéal maximal; donc P est noyau d'une représentation irréductible π. L'annulateur de tout vecteur de l'espace de π est de codimension finie, donc la dimension de π est finie, et puisque $\mathfrak{g}$ est résoluble cette dimension vaut 1; donc π s'annule sur $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Supposons k non algébriquement clos et soit $\bar{k}$ une clôture algébrique de k. Alors $\bar{k} \otimes P$ est un idéal bilatère de codimension finie de $U(\bar{\mathfrak{g}}) = \bar{k} \otimes U(\mathfrak{g})$, où $\bar{\mathfrak{g}} = \bar{k} \otimes_k \mathfrak{g}$. Il existe un idéal premier $\tilde{P}$ de $U(\bar{\mathfrak{g}})$ tel que $P = U(\mathfrak{g}) \cap \tilde{P}$ d'après 3.4.2, chapitre III de [9]. Il est clair que $\tilde{P}$ est de codimension finie dans $U(\bar{\mathfrak{g}})$. Donc $[\bar{\mathfrak{g}}, \bar{\mathfrak{g}}] = \bar{k} \otimes_k [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est contenu dans $\tilde{P}$ et par suite $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset P$. $\square$

Corollaire 3.2. *Avec les mêmes hypothèses qu'en* 3.1, *tout idéal à gauche maximal de codimension finie J de $U(\mathfrak{g})$ est un idéal bilatère maximal.*

Preuve. D'après les remarques faites au début du §1, il existe un idéal bilatère de codimension finie I de U($\mathfrak{g}$) tel que $I \subseteq J$. Donc $I \subseteq J\cdot.U(\mathfrak{g}) \subseteq J$ et $J\cdot.U(\mathfrak{g})$ est un idéal primitif de $U(\mathfrak{g})$, puisque l'idéal à gauche J est maximal. D'après 3.1, $J\cdot.U(\mathfrak{g})$ contient $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ donc $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \subset J$ et par suite J est bilatère. □

Nous allons rappeler quelques résultats de [15]. Si $A = U(\mathfrak{g})$ est l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie résoluble sur un corps k de caractéristique nulle, la résolution injective minimale de A, considéré comme A-module à gauche, a pour i-ème terme, $i = 0, \ldots, n$, $n = \dim_k \mathfrak{g}$, un module injectif E_i qui se laisse décomposer en somme directe de deux sous-modules $E_i = E_i^{\mathrm{I}} \oplus E_i^{\mathrm{II}}$; le module E_i^{I} est somme directe des sous-modules $E_A(A/P)$ (où $E_A(A/P)$ désigne l'enveloppe injective du A-module à gauche A/P) lorsque P parcourt une fois et une seule la famille des idéaux premiers de A de hauteur i. Le module E_i^{II} est moins facile à décrire. On peut mentionner que E_i^{II} est un module de type II au sens de K.A. Brown [7] c'est-à-dire $E_i^{\mathrm{II}} = \coprod E(A/I)$ où I est un idéal à gauche $\bigcap$-irréductible de A et où $E(A/I)$ est l'enveloppe injective du A-module à gauche A/I; le module $M = A/I$ est critique vis-à-vis de la dimension de Krull au sens de Gabriel–Rentschler et tel que K-dim $M \lneq$ K-dim$(A/\mathrm{Ann}\, M)$. Utilisant une notion dûe à J. Lambek et G. Michler [13], on peut choisir l'idéal à gauche I premier à gauche, c'est-à-dire vérifiant la condition suivante: si a et $b \in A$ et $aAb \subseteq I$ alors a ou $b \in I$. Dans le cas où le corps k est algébriquement clos, on peut voir facilement que $Q = \mathrm{Ann}_A(A/I)$, le plus grand idéal bilatère contenu dans I, est premier et que chaque semi-invariant non nul, pour $\mathfrak{g}$ opérant dans A/Q par l'action adjointe, est un non diviseur de zéro dans A/I. On peut aussi décrire E_i^{II} en disant qu'il est somme directe de sous-modules injectifs indécomposables H vérifiant la condition suivante: pour tout $x \in H$, $x \neq 0$, tel que $\mathrm{Ann}_A(x)$ est maximal parmi les annulateurs dans A d'éléments non nuls de H, alors $\mathrm{Ann}_A(x)$ n'est pas un idéal bilatère de A.

Evidemment $E_0 = E_0^{\mathrm{I}}$ est le corps des fractions de A; on trouvera dans [15] une description de E_1^{II}. On montrera dans ce paragraphe que $E_n^{\mathrm{II}} = (0)$ si n est la dimension de $\mathfrak{g}$.

En conservant les notations qui précèdent on peut démontrer:

Proposition 3.3. *Si I est un idéal bilatère de codimension finie de $A = U(\mathfrak{g})$, alors* $\mathrm{Hom}_A(A/I, E_q^{\mathrm{II}}) = (0)$ *pour tout q.*

Preuve. Il suffit de vérifier que $\mathrm{Hom}_A(A/I, H) = (0)$ pour tout facteur indécomposable de E_q^{II}. Raisonnons par l'absurde et supposons que $x \in H$ soit un élément non nul annulé par I. Alors $Ax \subset H$ et $Ax \simeq A/J$ où J est un idéal à gauche de A, contenant I, donc de codimension finie dans A. Quitte à remplacer Ax par un sous-module simple qu'il contient, on peut supposer que l'idéal J est maximal à gauche.

Par suite $J=\mathrm{Ann}_A(x)$ est maximal parmi les annulateurs dans A d'éléments non nuls de H. Mais il résulte de 3.2 que J est bilatère et ceci est impossible par définition du type II. $\square$

Théorème 3.4. *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie résoluble de dimension finie* n *sur un corps* k *de caractéristique* 0. *Soient* $A=U(\mathfrak{g})$ *et* $E_i=E_i^{\mathrm{I}}\oplus E_i^{\mathrm{II}}$, $i=0,\dots,n$, *le i-ème terme de la résolution, injective à gauche minimale de* A. *Alors* $E_n^{\mathrm{II}}=(0)$ *et* $E_n^{\mathrm{I}}=\varinjlim_I \mathrm{Ext}_A^n(A/I,A)$ *où* I *parcourt la famille des idéaux bilatères de codimension finie de* A.

Preuve. D'après 2.11, $\varinjlim_I \mathrm{Ext}_A^n(A/I,A)=E$ est un A-module injectif et $T=\mathrm{Ext}_A^n(-,A)$ est naturellement équivalent à $\mathrm{Hom}_A(-,E)$ sur ${}_A\mathbf{Mod}^{f}$.

On vérifie d'abord que $\mathrm{Hom}_A(M,E_p)=0$ si $p\lneq n$ et si la dimension de M sur k est finie. Par un argument de récurrence sur le nombre de générateurs de M, on se ramène au cas où M est monogène donc, par 3.2, $M=A/J$ où J est un idéal bilatère de codimension finie de A. D'après 3.3, on a alors $\mathrm{Hom}_A(M,E_p^{\mathrm{II}})=0$ pour tout p. Enfin si $\mathrm{Hom}_A(A/J,E_p^{\mathrm{I}})\neq 0$ avec $p\lneq n$, alors E_p^{I} contiendrait l'enveloppe injective d'un A-module du type A/P avec P idéal maximal de codimension finie donc de hauteur n ce qui contredirait [15, 4.10 et 4.17].

Les foncteurs, de ${}_A\mathbf{Mod}$ dans $\mathbf{Ab}$, $\mathrm{Ext}_A^n(-,A)$ et

$$\mathrm{Hom}_A(-,E_n)/\mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_A(-,E_{n-1}))$$

sont isomorphes. Donc, sur la catégorie ${}_A\mathbf{Mod}^{f}$, les foncteurs $\mathrm{Ext}_A^n(-,A)=T$ et $\mathrm{Hom}_A(-,E_n)$ le sont aussi et pour tout idéal bilatère J de codimension finie les A-modules à gauche $T(A/J)$ et $\mathrm{Hom}_A(A/J,E_n)$ sont isomorphes. Par suite

$$\varinjlim_{\mathcal{J}} T(A/J)\simeq\varinjlim_{\mathcal{J}} \mathrm{Hom}_A(A/J,E_n)$$

et donc E est isomorphe à

$$\varinjlim_{\mathcal{J}} \mathrm{Hom}_A(A/J,E_n)=\varinjlim_{\mathcal{J}} \mathrm{Hom}_A(A/J,E_n^{\mathrm{I}})\oplus\varinjlim_{\mathcal{J}} \mathrm{Hom}_A(A/J,E_n^{\mathrm{II}});$$

c'est-à-dire que, d'après 3.3, E est isomorphe à $\varinjlim_{\mathcal{J}} \mathrm{Hom}_A(A/J,E_n^{\mathrm{I}})$. Mais il résulte de 2.7 que chaque élément de E_n^{I} est annulé par un idéal de codimension finie de A. Donc $E\simeq E_n^{\mathrm{I}}$.

On démontre ensuite que tout sous-module M de type fini de E_n^{II} est de dimension homologique $\leq n-1$; en effet sinon on aurait $\mathrm{Ext}_A^n(M,A)\neq 0$ et [3, ch. II, 7.5], $\mathrm{Ext}_A^i(\mathrm{Ext}_A^n(M,A),A)=0$ pour $i<n$; donc $\mathrm{Ext}_A^n(\mathrm{Ext}_A^n(M,A),A)\neq 0$ et d'après [3, ch. II, 7.10], $\mathrm{Ext}_A^n(\mathrm{Ext}_A^n(M,A),A)$ est un A-module non nul de dimension finie sur k. Et il résulte de [3, ch. II, 4.15 et 7.11] que M possède un sous-module non nul de dimension finie sur k. Par suite il existe un idéal (bilatère) I de codimension finie de A tel que $\mathrm{Hom}_A(A/I,E_n^{\mathrm{II}})\neq 0$ ce qui contredit 3.3.

Soit $E_A(A/I)$ une composante non nulle de E_n^{II}, à supposer qu'elle existe, où I est un idéal à gauche de A. Alors $\mathrm{dh}_A(A/I)\leq n-1$ et $\mathrm{Ext}_A^n(A/I,A)=0$. Si $E_{n-1}\xrightarrow{p_{n-1}}$

$E_n \to 0$ est la dernière flèche de la résolution injective minimale de A, l'application $\mathrm{Hom}_A(A/I, E_{n-1}) \to \mathrm{Hom}_A(A/I, E_n)$ qui en résulte est surjective. Donc il existe un homomorphisme nécessairement injectif $f: A/I \to E_{n-1}$ tel que $p_{n-1} \circ f$ soit l'identité sur A/I. Comme $\ker p_{n-1}$ est essentiel dans E_{n-1} on a alors $\mathrm{Im} f \cap \ker p_{n-1} \neq 0$ ce qui contredit le fait que $p_{n-1} \circ f$ est l'identité sur A/I. Donc $E_n^{\mathrm{II}} = 0$. □

A l'aide de la remarque suivante dûe à F. Couchot, on retrouve une partie de ce qui précède.

Proposition 3.4. *Soit B un anneau unitaire intègre et I un idéal bilatère non nul de B. Soit $0 \to B \to E_0 \to E_1 \to \cdots$ une résolution injective minimale du B-module à gauche B. Soit $i \in \mathbb{N}$ tel que* $\mathrm{Hom}_B(B/I, E_i) \neq 0$. *Alors le grade du B-module B/I est $\leq i$.*

Preuve. Supposons qu'on ait $\mathrm{Ext}_B^j(B/I, B) = 0$ pour tout $j \leq i$. Montrons par récurrence sur k que $\mathrm{Hom}_B(B/I, E_k)$ est nul pour tout $k \leq i$. Puisque B est intègre et que $I \neq 0$, on a $\mathrm{Hom}_B(B/I, B) = 0$; il en résulte que $\mathrm{Hom}_B(B/I, E_0) = 0$; en effet si $x \in E_0 \setminus \{0\}$ vérifie $I \cdot x = 0$, alors soit $\alpha \in B$ tel que $\alpha x \in B \setminus \{0\}$ on a $I\alpha x = 0$ d'où $\alpha x = 0$. Supposons $i > 1$ et soit $0 \leq k < i$ tel que $\mathrm{Hom}_B(B/I, E_k)$ soit nul; montrons qu'il en est de même de $\mathrm{Hom}_B(B/I, E_{k+1})$. A partir des suites:

$$E_k \xrightarrow{d_k} E_{k+1} \xrightarrow{d_{k+1}} E_{k+2},$$

on obtient:

$$\mathrm{Hom}_B(B/I, E_k) \xrightarrow{\delta_k} \mathrm{Hom}_B(B/I, E_{k+1}) \xrightarrow{\delta_{k+1}} \mathrm{Hom}_B(B/I, E_{k+2}).$$

Puisque $\mathrm{Ext}_B^{k+1}(B/I, B) = 0$, car $k+1 \leq i$, on en déduit $\mathrm{Ker}\, \delta_{k+1} = 0$. Considérons les suites exactes:

$$0 \to \mathrm{Ker}\, d_{k+1} \to E_{k+1} \xrightarrow{d_{k+1}} E_{k+2},$$

$$0 \to \mathrm{Hom}_B(B/I, \mathrm{Ker}\, d_{k+1}) \to \mathrm{Hom}_B(B/I, E_{k+1}) \xrightarrow{\delta_{k+1}} \mathrm{Hom}_B(B/I, E_{k+2})$$

on a $0 = \mathrm{Ker}\, \delta_{k+1} = \mathrm{Hom}_B(B/I, \mathrm{Ker}\, d_{k+1})$. D'où $0 = \mathrm{Hom}_B(B/I, E_{k+1})$ puisque E_{k+1} est l'enveloppe injective du B-module $\ker d_{k+1}$. □

Corollaire 3.5. (1) *Pour tout entier i, $0 \leq i < n$ on a $\sigma(E_i) = 0$ et $\sigma(E_n) = H_\sigma^n(A)$ $(= \varinjlim_I \mathrm{Ext}_A^n(A/I, A)$ où I parcourt les idéaux bilatères de A cofinis).*

(2) *Soit P un idéal premier de hauteur $h > i$, alors on a* $\mathrm{Hom}_A(A/P, E_i) = 0$.

Preuve. (1) Soit I un idéal bilatère cofini de A; alors [3] le grade de A/I est n, d'où $\mathrm{Hom}_A(A/I, E_i) = 0$ pour tout $i < n$. On obtient donc $\sigma(E_i) = 0$ pour tout $i < n$. D'autre part, en considérant la suite:

$$0 = \mathrm{Hom}_A(A/I, E_{n-1}) \to \mathrm{Hom}_A(A/I, E_n) \to 0.$$

On obtient $\operatorname{Ext}_A^n(A/I, A) = \operatorname{Hom}_A(A/I, E_n)$, d'où en passant à la limite directe:

$$H_\sigma^n(A) = \sigma(E_n).$$

(2) Si P est un idéal premier de A, d'après [3], [20] et [21], sa hauteur est égale au grade de A/P, d'où le résultat. □

Théorème 3.6. *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie résoluble de dimension finie n sur un corps* k *algébriquement clos de caractéristique* 0. *Alors le n-ième terme de la résolution injective minimale de* $A = U(\mathfrak{g})$ *est isomorphe au module* $V(\mathfrak{g})$ *du Paragraphe* 1.

Preuve. Nous commencerons par démontrer que le A-module à gauche $\coprod_{\operatorname{ht} P = n} A/P$ est isomorphe à un sous-module essentiel de $V(\mathfrak{g})$. Pour cela posons $\mathfrak{B} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ et soit $N = \mathfrak{B}A = A\mathfrak{B}$ l'idéal (bilatère) de A engendré par $\mathfrak{B}$. Alors $C = A/N$ est un anneau de polynômes de dimension $m = n - \dim \mathfrak{B}$.

Puisque chaque idéal premier P de hauteur n de A contient $\mathfrak{B}$ (ceci car GK-$\dim A/P = n - \operatorname{ht} P = 0$), on a:

$$\coprod_{\operatorname{ht} P = n} A/P = \coprod_{\operatorname{ht} P' = m} C/P'.$$

Puisque k est algébriquement clos et que C est un anneau de polynômes sur k, le C-module $\coprod_{\operatorname{ht} P' = m} C/P'$ est essentiel dans $V(\mathfrak{g}/\mathfrak{B}) = E_C(\coprod_{\operatorname{ht} P' = m} C/P')$, d'après 1.4. La surjection canonique $p: A \to C$ induit un A-homomorphisme évidemment injectif $\theta: V(\mathfrak{g}/\mathfrak{B}) \to V(\mathfrak{g})$ défini par $\theta(f) = f \circ p$. Donc θ induit un homomorphisme injectif de $\coprod_{\operatorname{ht} P = n} A/P$ dans $V(\mathfrak{g})$ que l'on peut aussi décrire en faisant correspondre à $(\alpha_p) \in \coprod_{\operatorname{ht} P = n} A/P$, $\alpha_p \in k$, α_p presque tous nuls, l'application k-linéaire $f = \theta((\alpha_p)): A \to k$ définie par $f = \sum_P f_P \circ \varrho_P$ où $\varrho_P: A \to A/P$ est la surjection canonique et $f_P: A/P \to k$ est l'application qui envoie $\bar{1}$ en α_p. L'inclusion $\coprod A/P \subset V(\mathfrak{g})$ réalisée par θ est essentielle; en effet soit $f \in V(\mathfrak{g})$, $f \neq 0$; d'après 1.2, il existe $q \geq 1$ tel que $f(N^q) = 0$ et $f(N^{q-1}) \neq 0$. Soit $a \in N^{q-1}$ tel que $f(a) \neq 0$. Alors $a \cdot f \neq 0$ et $(a \cdot f)(N) = 0$; donc $a \cdot f$ est un élément non nul de $V(\mathfrak{g}/\mathfrak{B})$. Par suite, il existe $b \in A$ tel que $0 \neq b \cdot (a \cdot f) \in \coprod A/P$, c'est-à-dire $0 \neq (ba) \cdot f \in \coprod A/P$. L'anneau A étant noethérien, l'enveloppe injective $E_A(\coprod_{\operatorname{ht} P = n} A/P)$ est égale à $\coprod_{\operatorname{ht} P = n} E_A(A/P) = E_n = E_n^{\mathrm{I}}$. D'autre part, comme $\coprod_{\operatorname{ht} P = n} A/P \subset V(\mathfrak{g}) \subset \operatorname{Hom}_k(A, k)$ et que le A-module à gauche $\operatorname{Hom}_k(A, k)$ est injectif, il en résulte que $E_n \subset \operatorname{Hom}_k(A, k)$. Comme chaque élément de $E_n = \varinjlim \operatorname{Ext}_A^n(A/I, A)$ est annulé par un idéal de codimension finie, l'inclusion $E_n^{\mathrm{I}} \subset \operatorname{Hom}_k(A, k)$ entraîne que $E_n \subseteq V(\mathfrak{g})$; ces deux modules étant extensions essentielles de $\coprod_{\operatorname{ht} P = n} A/P$ et E_n étant injectif, il en résulte que $E_n = V(\mathfrak{g})$. □

Il est clair que $V(\mathfrak{g})$ est un bimodule et, lorsque k est algébriquement clos, c'est un A-module injectif à droite et un A-module injectif à gauche. D'autre part, que k soit algébriquement clos ou non, $E_n = \varinjlim_I \operatorname{Ext}_A^n(A/I, A)$ est muni d'une structure de A-bimodule, la structure de A-module à droite provenant de celle de A et du fait que si $I \subset J$, l'application canonique $\operatorname{Ext}_A^n(A/I, A) \to \operatorname{Ext}_A^n(A/J, A)$ est un homomorphisme de A-bimodules. D'autre part, tout élément du A-module à droite E_n est annulé par un idéal bilatère de codimension finie; en effet $\mathrm{Ext}_A^n(A/I, A)$ est un A-module à droite de type fini et il résulte de [3] que sa dimension de Gelfand-Kirillov est nulle. Donc c'est un k-espace vectoriel de dimension finie et il est par suite annulé à droite par un idéal de codimension finie. On démontrera dans le paragraphe suivant que E_n est aussi un A-module à droite injectif et qu'il est isomorphe comme A-module à droite à $V(\mathfrak{g})$. Notons que le fait que $V(\mathfrak{g})$ est un A-module injectif implique que, lorsque k est algébriquement clos, on retrouve le résultat de [12]: $H^i(\mathfrak{g}, V(\mathfrak{g}))=0$ pour $i\geq 1$. Nous ne savons pas si $V(\mathfrak{g})$ est injectif lorsque k n'est pas algébriquement clos.

4. L'isomorphisme des A-modules à droite E_n et $V(\mathfrak{g})$

Dans tout le paragraphe, A désigne l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie résoluble $\mathfrak{g}$ de dimension n sur le corps k algébriquement clos de caractéristique zéro.

Rappelons que H_σ^i est le i-ème dérivé droit du foncteur $\sigma : {}_A\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$ défini au §1 par

$$\sigma(M) = \{m\in M \mid \exists I \in \mathscr{F} \text{ tel que } I\cdot m=0\}$$

où $\mathscr{F}$ est l'ensemble des idéaux bilatères cofinis de A.

Le groupe $H_\sigma^n(A)=\varinjlim_{I\in\mathscr{F}} \mathrm{Ext}_A^n(A/I, A)$ est muni d'une structure de A-bimodule, la structure à droite provenant de la structure à droite de A; l'isomorphisme de 3.4 permet de transporter sur E_n cette structure de bi-module.

L'étude de cette structure permet de façon annexe d'obtenir quelques résultats sur les foncteurs H_σ^i.

Lemme 4.1. *Soit M un A-module à gauche. Alors on a*

$$\sigma[E_A(M)] = E_A[\sigma(M)].$$

Preuve. C'est une adaptation du Lemme 1 de [4]. Soit $F=\sigma[E_A(M)]$; montrons que F est injectif.

Soit J un idéal à gauche de A et $f: J\to F$ un morphisme de A-modules à gauche; comme $f(J)$ est de type fini, d'après 2.8 il existe des idéaux bilatères cofinis I_1 et I_2 tels que $I_1\cdot f(J)=0$, $I_2\cap J\subseteq I_1J$ et $I_2\subseteq I_1$. Puisque $f(I_2\cap J)\subseteq I_1\cdot f(J)=0$, il existe par passage au quotient, un morphisme $\bar{f}$ de (A/I_2)-modules de $J/(I_2\cap J)$ dans le (A/I_2)-module injectif:

$$F'=\{x\in E_A(M) \mid I_2\cdot x=0\} \qquad [19, \text{Proposition } 2.27].$$

D'où un prolongement $g: A/(I_2\cap J)\to F'$ de $\bar{f}$. Si φ désigne l'application canonique $A\to A/(I_2\cap J)$, alors $\varphi\circ g$ prolonge f.

Il est immédiat que $\sigma(M)$ est essentiel dans $\sigma[E_A(M)]$; en effet soit $x\in\sigma[E_A(M)]$,

$x \neq 0$ et soit $y \in Ax \cap M$, $y \neq 0$; il existe un idéal I bilatère cofini de A tel que $I \cdot x = 0$. D'où $IAx = 0$ et $I \cdot y = 0$.

Corollaire 4.2. *Pour tout A-module à gauche M vérifiant $\sigma(M) = M$, on a*

$$\sigma[E_A(M)] = E_A(M).$$

Corollaire 4.3. *Pour tout A-module à gauche M tel que $\sigma(M) = M$, on a*

$$H^i_\sigma(M) = 0 \quad \textit{pour tout } i > 0.$$

Preuve. Il suffit de considérer une résolution injective minimale de M:

$$0 \to M \to F_0 \to F_1 \to \cdots$$

on a $\sigma(F_i) = F_i$ pour tout $i \geq 0$ d'après 4.2. □

Une troisième conséquence de 4.1 est la proposition suivante:

Proposition 4.4. *Soit E un A-module à gauche injectif indécomposable; alors on a soit $\sigma(E) = E$, soit $\sigma(E) = \{0\}$. Si on pose $E = E_A(A/J)$ où J est un idéal à gauche, alors on a $\sigma(E) = E$ si et seulement si J est de codimension finie.*

Preuve. (1) Supposons $\sigma(E) \neq \{0\}$; soit alors $y \in E \setminus \{0\}$ tel que Ay soit de dimension finie. On a $\sigma[Ay] = Ay$. D'où d'après 4.1

$$\sigma[E_A(Ay)] = E_A[\sigma(Ay)] = E_A(Ay).$$

Or on a d'après [16, Théorème 2.4], $E = E_A(Ay)$. Donc on a $\sigma(E) = E$.

(2) Supposons d'autre part que J soit un idéal à gauche tel que $E = E_A(A/J)$ on a $\sigma(E) = E$ si et seulement si $\sigma(A/J) = A/J$, c'est-à-dire si J est cofini. □

Les propositions suivantes sont établies en vue de l'injectivité du A-module à droite E_n.

Proposition 4.5. *Soit M un A-module à gauche vérifiant les conditions:*

(a) *Pour tout idéal à gauche J de codimension finie, on a* $\mathrm{Ext}^1_A(A/J, M) = 0$.

(b) $\sigma(M) = M$.

Alors M est injectif.

Preuve. Soit $x \in E_A(M) \setminus M$; d'après 4.2, il existe un idéal bilatère cofini I tel que $I \cdot x = 0$. Soit $K = \{a \in A \mid ax \in M\}$. Les modules à gauche $(M + Ax)/M$ et A/K sont isomorphes. Comme $I \subseteq K$, on a $\mathrm{Ext}^1_A((M + Ax)/M, M) = 0$.

Considérons la suite exacte:

$$\mathrm{Hom}_A(M + Ax, M) \xrightarrow{f} \mathrm{Hom}_A(M, M) \xrightarrow{g} \mathrm{Ext}^1_A((M + Ax)/M, M) = 0.$$

Puisque $x \in E_A(M)$, l'application $\mathbb{1}_M$ n'appartient pas à l'image de f car si serait facteur direct de $M+Ax$; comme M est essentiel dans $E(M)$ c'est imp Donc f n'est pas surjective et on obtient donc une contradiction. $\square$

Remarque. Le résultat 4.5 peut se déduire de la démonstration de 2.9; la preu née ici est totalement différente et obtenue en adaptant une démonstration le corollaire est également adapté de [4].

Corollaire 4.6. *Soit M un A-module à gauche; on note* id(M) *sa dimension in On a:*

$$\mathrm{id}(M) \leq \mathrm{Sup}\{\mathrm{dh}_A(A/J);\ J \textit{ idéal à gauche cofini}\}.$$

Preuve. Soit $m \in \mathbb{N}$ et supposons que pour tout idéal à gauche J cofini $\mathrm{Ext}_A^{m+1}(A/J, M)=0$; montrons que $\mathrm{id}(M) \leq m$. On raisonne par récurrence Pour $m=0$, on utilise 4.5. Pour $m>0$ on considère la suite exacte:

$$\mathrm{Ext}_A^m(A/J, E_A(M))=0 \to \mathrm{Ext}_A^m(A/J, E_A(M)/M) \to$$

$$\to \mathrm{Ext}_A^{m+1}(A/J, M)=0 \to \mathrm{Ext}_A^{m+1}(A/J, E_A(M))=0.$$

L'hypothèse de récurrence montre que $\mathrm{id}(E_A(M)/M) \leq m-1$; d'où $\mathrm{id}(M) \leq$

Définition 4.7. Pour tout A-module à droite M on note $*M$ le A-module à défini par

$$a * m = m \cdot \varepsilon(a), \qquad a \in A, \quad m \in M$$

où ε est l'antiautomorphisme involutif de A.

Il est alors immédiat que si $E'_A(M)$ désigne l'enveloppe injective de M o

$$E_A(*M) = *(E'_A(M)).$$

D'autre part à toute résolution projective

$$\to P_i \to \cdots \to P_0 \to M \to 0$$

ou injective

$$0 \to M \to E_0 \to E_1 \to \cdots$$

de M correspond une résolution projective

$$\to *P_i \to \cdots \to *P_0 \to *M \to 0$$

ou injective

$$0 \to *M \to *E_0 \to \cdots \qquad \text{de } *M.$$

On peut définir de même pour tout A-module à gauche N le A-module à drc

Lemme 4.8. (1) *Soit M un A-module à droite et N un A-module à gauche; alors, pour tout entier i, les groupes* $\mathrm{Tor}_i^A(M,N)$ *et* $\mathrm{Tor}_i^A(N^*, {}^*M)$ *sont isomorphes.*

(2) *Soient M et N des A-modules à gauche. Alors pour tout entier i les groupes* $\mathrm{Ext}_A^i(N,M)$ *et* $\mathrm{Ext}_A^i(N^*,M^*)$ *sont isomorphes.*

(3) *Soit M un A-module à gauche. Alors, pour tout entier i les A-modules à droite $H^i_{\sigma^*}(M^*)$ et $(H^i_\sigma(M))^*$ sont isomorphes, où σ^* et $H^i_{\sigma^*}$ sont définis de manière analogue à σ et H^i_σ, mais pour les modules à droite.*

Remarque. Considérons le bimodule $V(\mathfrak{g})$ défini au §1. Il est immédiat que les bimodules $V(\mathfrak{g})$ et ${}^*V(\mathfrak{g})^*$ sont isomorphes (on définit $a*m*b=\varepsilon(b)\cdot m\cdot\varepsilon(a)$ pour $a,b\in A$, $m\in V(\mathfrak{g})$).

Preuve. Soit N un A-module à gauche et

$$\to P_n\to\cdots\to P_0\to N\to 0$$

une résolution projective de N.

(1) Si M est un A-module à droite, on considère le diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd}
M\otimes_A P_n \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & M\otimes_A P_0 \arrow[d] \\
P_n^*\otimes_A {}^*M \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_0^*\otimes_A {}^*M
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont définies de façon évidentes et sont des isomorphismes de groupes. On obtient $\mathrm{Tor}_i^A(M,N)\simeq\mathrm{Tor}_i^A(N^*,{}^*M)$.

(2) Si M est un A-module à gauche, on considère le diagramme:

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(P_0,M) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(P_n,M) \arrow[r] \arrow[d, equal] & {} \\
{} \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(P_0^*,M^*) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(P_n^*,M^*) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

On obtient $\mathrm{Ext}_A^i(N,M)\simeq\mathrm{Ext}_A^i(N^*,M^*)$.

(3) Soit

$$0\to N\to N_0\to N_1\to\cdots$$

une résolution injective de N; alors on a la résolution injective de N^*:

$$0\to N^*\to N_0^*\to N_1^*\to\cdots.$$

D'autre part

$$\sigma^*(N_i^*)=\{m\in N_i\mid \exists I\in\mathscr{F},\ \varepsilon(I)\cdot m=0\}=(\sigma(N_i))^*. \qquad \square$$

Théorème 4.9. *Le A-module à droite $E_n = H^n_\sigma(A)$ est injectif.*

Preuve. (1) Si M est un A-module à gauche de type fini, alors $\mathrm{Ext}^n_A(M,A)$ est un A-module à droite dont tout élément est annulé par un idéal cofini.

En effet supposons $\mathrm{Ext}^n_A(M,A) \neq 0$. D'après [3, ch. II, 7.5], on a

$$\mathrm{Ext}^i_A[\mathrm{Ext}^n_A(M,A),A] = 0 \quad \text{pour } i<n.$$

Le grade du A-module à droite $\mathrm{Ext}^n_A(M,A)$ est n et donc, d'après [3, ch. II, Théorème 7.1], sa dimension de Gelfand–Kirillov est nulle. Pour tout élément $x \in \mathrm{Ext}^n_A(M,A)$ on a donc $\dim_K xA < +\infty$, d'où l'existence d'un idéal cofini J tel que $x \cdot J = 0$.

(2) On a donc $\sigma[{}^*(H^n_\sigma(A))] = {}^*(H^n_\sigma(A))$; ce qui permet d'appliquer 4.5. Soit J un idéal à gauche cofini de A. On a $\mathrm{Ext}^i_A(A/J,A) = 0$ pour $i \neq n$; on peut donc appliquer [3, ch. II, 4.14], et compte tenu de 4.8 on obtient les isomorphismes de groupes:

$$\mathrm{Ext}^1_A(A/J, {}^*(H^n_\sigma(A))) \simeq \mathrm{Tor}^A_{n-1}[\mathrm{Ext}^n_A(A/J,A), {}^*(H^n_\sigma(A))]$$

où $\mathrm{Ext}^n_A(A/J,A)$ est muni de sa structure de A-module à droite

$$\begin{aligned}
&\simeq \mathrm{Tor}^A_{n-1}[H^n_\sigma(A), {}^*(\mathrm{Ext}^n_A(A/J,A))] \\
&\simeq \varinjlim_{I \in \mathscr{F}} \mathrm{Tor}^A_{n-1}[\mathrm{Ext}^n_A(A/I,A), {}^*(\mathrm{Ext}^n_A(A/J,A))] \\
&\simeq \varinjlim_{I \in \mathscr{F}} \mathrm{Ext}^1_A(A/I, {}^*(\mathrm{Ext}^n_A(A/J,A))] \\
&\simeq H^1_\sigma[{}^*(\mathrm{Ext}^n_A(A/J,A))].
\end{aligned}$$

En utilisant 4.3 on obtient $\mathrm{Ext}^1_A(A/J, {}^*(H^n_\sigma(A)) = 0$. D'où d'après 4.5, ${}^*(H^n_\sigma(A))$ est un A-module à gauche injectif et $H^n_\sigma(A)$ un A-module à droite injectif. □

Théorème 4.10. *Les modules E_n et $V(\mathfrak{g})$ sont isomorphes comme A-modules à droite.*

Preuve. Posons $E = E_n = \varinjlim_{\mathscr{F}} \mathrm{Ext}^n_A(A/I,A)$ comme module à droite. Nous allons montrer successivement que chaque A-module à droite A/P, lorsque P parcourt les idéaux maximaux de hauteur n de A est contenu une fois et une seule dans E, puis que la somme des sous-modules A/P de E est directe et que $V(\mathfrak{g})_A$ est isomorphe à un sous-module de E, et enfin que $E = V(\mathfrak{g})_A$.

Remarquons d'abord que si P est un idéal premier cofini le A-module à gauche ${}_AM = \mathrm{Ext}^n_A((A/P)_A, A_A)$ (où la structure à gauche provient de celle de A) est de la forme ${}_A(A/P')$ où P' est un idéal premier cofini. Pour cela il suffit de remarquer que ${}_AM$ est un A-module à gauche de type fini et de GK-dimension nulle, donc de dimension finie sur k, puis de vérifier que ${}_AM$ est un module simple; il en résultera, puisque tout idéal à gauche maximal cofini de A est un idéal bilatère, que ${}_AM$ est du type annoncé. Vérifions que ${}_AM$ est simple; s'il existait une suite exacte $0 \to N \to M \to U \to 0$, avec $N \neq 0$, alors on aurait, puisque GK-dim $M = 0$ et que $\mathrm{Ext}^n_A({}_AM, {}_AA)_A$ est isomorphe à $(A/P)_A$ (cf. [3]), la suite exacte:

$$0 \to \mathrm{Ext}^n_A(U, A) \to A/P \to \mathrm{Ext}^n_A(N, A) \to 0$$

et $\mathrm{Ext}^n_A(N, A) \neq 0$. Donc $\mathrm{Ext}^n_A(U, A) = 0$ et $U = 0$. Pour tout idéal premier cofini P, il existe un idéal premier cofini P' tel que $(A/P)_A = \mathrm{Ext}^n_A({}_A(A/P'), {}_AA)_A$: il suffit de prendre ${}_A(A/P') = {}_A\mathrm{Ext}^n_A((A/P)_A, A_A)$. Puisque les morphismes de transition du système direct $(\mathrm{Ext}^n_A(A/I, A)_A, I \in \mathscr{F})$ sont injectifs, les morphismes $\mathrm{Ext}^n_A(A/I, A)_A \to \varinjlim_{I \in \mathscr{F}} \mathrm{Ext}^n_A(A/I, A) = E_A$ sont injectifs et E_A est réunion des $\mathrm{Ext}^n_A(A/I, A)$, $I \in \mathscr{F}$. Il en résulte que pour chaque idéal premier cofini P, $(A/P)_A$ est contenu dans E_A. De plus E_A ne peut contenir plus d'une copie de $(A/P)_A$, pour un idéal premier cofini P. En effet, supposons que $u_1A \oplus u_2A \subset E_A$, avec $u_iA \simeq A/P$, $i = 1, 2$. Alors il existe $I \in \mathscr{F}$ tel que $u_1A \oplus u_2A \subset \mathrm{Ext}^n_A(A/I, A)_A$. Il en résulte une suite exacte de A-modules à gauche:

$$A/I \to (A/P') \oplus (A/P') \to 0$$

où P' est l'idéal premier cofini tel que $A/P' \simeq \mathrm{Ext}^n_A(A/P, A)$; donc P' est contenu dans I et on obtient la contradiction: $(A/P') \oplus (A/P')$ est un quotient de A/P'.

La somme dans E_A des A-modules $(A/P)_A$, où P parcourt les idéaux premiers cofinis, est directe: ceci résulte du fait que les P sont deux à deux distincts et que P est l'annulateur de A/P.

Puisque $V(\mathfrak{g})_A$ est l'enveloppe injective de $\coprod (A/P)_A$ et que $\coprod (A/P)_A \subset E_A$, on a: $V(\mathfrak{g})_A \subset E_A$. Montrons qu'il y a égalité; il suffit pour cela de vérifier que E_A est extension essentielle de $\coprod (A/P)_A$. Soit $x \in E_A$. Alors x est annulé à droite par un idéal cofini I donc $xA \simeq A/I$ où I contient un élement de $\mathscr{F}$. Le A-module à droite A/I contient un sous-module simple donc de la forme $(A/P)_A$ où P est un idéal premier cofini. Par suite $xA \cap \coprod (A/Q)_A \neq (0)$. $\square$

Les lemmes suivants sont dans [2] ou adaptés de [2].

Lemme 4.11. *Soit B un anneau et soient F et G deux foncteurs covariants exacts à droite de la catégorie ${}_B$**Mod** vers elle même. On désigne par L^iF et L^iG leurs i-éme dérivés gauches. Soit $\phi : F \Rightarrow G$ un morphisme fonctoriel tel que $\phi(M)$ soit un isomorphisme pour tout A-module à gauche de type fini M. Alors pour tout A-module à gauche de type fini M, les modules $L^iF(M)$ et $L^iG(M)$ sont isomorphes.*

Preuve. On considère une résolution projective de type fini de M:

$$\cdots \to P_i \to \cdots \to P_0 \to M \to 0.$$

On en déduit un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & F(P_i) & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & F(P_0) & \longrightarrow & F(M) & \longrightarrow \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle \phi(P_i)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \phi(P_0)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \phi(M)} & \\
\cdots & \longrightarrow & G(P_i) & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & G(P_0) & \longrightarrow & G(M) & \longrightarrow
\end{array}$$

Par passage aux quotients $\phi(P_i)$ détermine un isomorphisme de $L^iF(\Lambda$
$L^iG(M)$. □

Lemme 4.12. *On désigne par G le foncteur*

$$\mathrm{Hom}_{A,\,\mathrm{droite}}(\mathrm{Hom}_{A,\,\mathrm{gauche}}(-, A), (H^n_\sigma(A))_A)$$

*de la catégorie ${}_A$**Mod** vers elle-même, la structure de A-module à gauche d*
provenant de la structure de A-module à gauche $H^n_\sigma(A)$.

Alors les foncteurs $F = H^n_\sigma$ et G réalisent les hypothèses de 4.11.

Preuve. F est exact à droite parce que A est de dimension homologique global à n, G est exact à droite parce que le module à droite $(H^n_\sigma(A))_A$ est injectif c 4.9.

Soit M un A-module à gauche, $f \in \mathrm{Hom}_A(M, A)$ et $x \in H^n_\sigma(M)$; on pose

$$(\phi(M)(x))(f) = (H^n_\sigma(f))(x).$$

(1) Montrons que $\phi(M)(x) \in G(M)$. Soient $f \in \mathrm{Hom}_A(M, A)$, $\lambda \in A$ et $I \in \mathscr{F}$

$$\cdots \to P_i \to \cdots \to P_0 \to A/I \to 0$$

une résolution projective du A-module à gauche A/I.

Soit $\psi = \mathrm{Hom}_A(\mathbb{1}_{P_j}, f)$ et $\psi' = \mathrm{Hom}_A(\mathbb{1}_{P_j}, f \cdot \lambda)$. On a pour tout $g \in \mathrm{Hom}_A($

$$\psi'(g) = (f \cdot \lambda) \circ g = (f \circ g) \cdot \lambda = \psi(g) \cdot \lambda.$$

Soient $\varphi = \mathrm{Ext}^n_A(A/I, f)$ et $\varphi' = \mathrm{Ext}^n_A(A/I, f \cdot \lambda)$; on a pour tout $g \in \mathrm{Ext}^n_A(A$
$\varphi'(g) = \varphi(g) \cdot \lambda$. On en déduit par passage à la limite directe, si $x \in H^n_\sigma(M)$,

$$[H^n_\sigma(f \cdot \lambda)](x) = [(H^n_\sigma(f))(x)] \cdot \lambda,$$

c'est-à-dire $[\phi(M)(x)](f \cdot \lambda) = [\phi(M)(x)(f)] \cdot \lambda$.

(2) Montrons que $\phi(M)$ est un morphisme de A-modules à gauche.

Soient $x \in H^n_\sigma(M)$, $\lambda \in A$, $f \in \mathrm{Hom}_A(M, A)$; on a

$$[\phi(M)(\lambda \cdot x)](f) = [H^n_\sigma(f)](\lambda x) = \lambda \cdot (H^n_\sigma(f)(x),$$

$$[\lambda(\phi(M)(x))](f) = \lambda \cdot [\phi(M)(x)(f)] = \lambda \cdot [H^n_\sigma(f)(x)].$$

(3) Montrons que ϕ est un morphisme fonctoriel. Soient $g \in \mathrm{Hom}_A(M, M')$, $x \in F(M)$, $f \in \mathrm{Hom}_A(M, A)$. On a

$$([\phi(M') \circ F(g)](x))(f) = H_\sigma^n(f)(F(g)(x))$$
$$= [H_\sigma^n(f) \circ H^n(g)](x) = (H_\sigma^n(f \circ g))(x),$$
$$([G(g) \circ \phi(M)](x))(f) = [\phi(M)(x)](f \circ g) = [H_\sigma^n(f \circ g)](x).$$

(4) Montrons que pour tout A-module à gauche de type fini M, $\phi(M)$ est un isomorphisme.

Soient x et x' deux éléments de $H_\sigma^n(A)$ tels que $\phi(A)(x) = \phi(A)(x')$. On a

$$(\phi(A)(x))(\mathbb{1}_A) = (H_\sigma^n(\mathbb{1}_A))(x) = x = x'.$$

Donc $\phi(A)$ est injective.

Soit $g \in G(A)$ et soit $f \in \mathrm{Hom}_A(A, A)$; on a:

$$(\phi(A)[g(\mathbb{1}_A)])(f) = (\phi(A)[g(\mathbb{1}_A)])(\mathbb{1}_A \cdot f(1))$$
$$= ((\phi(A)[g(\mathbb{1}_A)])(\mathbb{1}_A)) \cdot f(1) \qquad \text{d'après (1)}$$
$$= (H_\sigma^n(\mathbb{1}_A))(g(\mathbb{1}_A)) \cdot f(1)$$
$$= (g(\mathbb{1}_A)) \cdot f(1) = g(\mathbb{1}_A \cdot f(1)) = g(f).$$

On en déduit que $\phi(A)$ est un isomorphisme, puisque $\phi(A^k)$ est un isomorphisme pour tout entier $k \geq 1$.

Si M est un A-module à gauche de type fini il suffit de considérer un diagramme du type

$$\begin{tikzcd}
F(A^k) \arrow[r] \arrow[d, "\phi(A^k)"] & F(A^{k'}) \arrow[r] \arrow[d, "\phi(A^{k'})"] & F(M) \arrow[r] \arrow[d, "\phi(M)"] & 0 \\
G(A^k) \arrow[r] & G(A^{k'}) \arrow[r] & G(M) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Les morphismes $\phi(A^k)$ et $\phi(A^{k'})$ étant bijectifs, il en est de même de $\phi(M)$. □

Lemme 4.13. *Avec les notations du lemme précédent on a, pour tout* $i = 0, \ldots, n$

(1) *les foncteurs* L^iF *et* H^i *sont équivalents,*

(2) *les foncteurs* L^iG *et* $\mathrm{Hom}_{A,\,\mathrm{droite}}(\mathrm{Ext}_A^{n-i}(-, A), H_\sigma^n(A))$ *sont équivalents.*

Preuve. (1) On applique [8, Théorème 5.2, ch. III] aux suites connexes exactes:

$$0, \ldots, 0, H_\sigma^0, H_\sigma^1, \ldots, H_\sigma^n, 0, \ldots, L^nF, L^{n-1}F, \ldots, F, 0, \ldots.$$

En effet $\mathrm{H}_\sigma^n = F$; d'autre part pour tout $I \in \mathscr{F}$, on a $\mathrm{Ext}_A^i(A/I, A) = 0$ pour $i \neq n$ (cf. [3]); donc, pour tout module à gauche projectif P on a

$$\begin{cases} H_\sigma^n(P) = 0 & \text{pour } i \neq n, \\ L^iF(P) = 0 & \text{pour } i > 1. \end{cases}$$

(2) On pose $K^i = \mathrm{Hom}_{A,\,\mathrm{droite}}(\mathrm{Ext}_A^{n-i}(-,A), H_\sigma^n(A))$ et on applique [8, Théorème 5.2, ch. III] aux suites:

$$\dots, L^nG, L^{n-1}G, \dots, G, 0, 0, \dots, K^0, K^1, \dots, K^n, 0, \dots .$$

En effet on a $G = K^n$; d'autre part pour tout A-module à gauche projectif on a

$$\begin{cases} \mathrm{Ext}^{n-i}(P,A) = 0 & \text{pour } n-i>0, \quad \text{d'où } K^i(P)=0 \quad \text{pour } i<n, \\ L^i(G)(P) = 0 & \text{pour } i>1. \end{cases}$$

Proposition 4.14. *Pour tout A-module à gauche de type fini M les A-modules à gauche $H_\sigma^i(M)$ et $\mathrm{Hom}_{A,\,\mathrm{droite}}(\mathrm{Ext}_A^{n-i}(M,A), (V(\mathfrak{g}))_A)$ sont isomorphes.*

Preuve. Ceci découle immédiatement de 4.11, 4.12, 4.13. □

Corollaire 4.15. *Soit M un A-module à gauche de type fini. Alors*

(1) *Pour tout entier $i < \mathrm{prof}_A M$, on a $H_\sigma^i(M) = 0$.*

(2) *Pour tout entier $i > \text{GK-dim}\, M$, on a $H_\sigma^i(M) = 0$.*

Preuve. Soit $M \neq 0$. Remarquons que

$$\mathrm{prof}_A M = n - \mathrm{dh}_A M \geq n\text{-}\mathrm{grad}_A(M)$$

d'où $\mathrm{prof}_A M \geq \text{GK-dim}\, M$ d'après [3].

(1) Soit $i < \mathrm{prof}_A M$. D'après [3, ch. II, 4.14], on a, pour tout $I \in \mathcal{F}$,

$$\mathrm{Ext}_A^i(A/I, M) \simeq \mathrm{Tor}_{n-i}^A[\mathrm{Ext}_A^n(A/I, A), M].$$

Ces groupes sont nuls puisque $n - i > \mathrm{dh}_A M$. D'où $\mathrm{H}_\sigma^i(M) = 0$.

(2) Soit $i > \text{GK-dim}(M)$. D'après 4.14 on a

$$\mathrm{H}_\sigma^i(M) \simeq \mathrm{Hom}_{A,\,\mathrm{droite}}[\mathrm{Ext}_A^{n-i}(M,A), H_\sigma^n(A)].$$

Comme on a $n - i < n - \text{GK-dim}\, M = \mathrm{grad}_A M$, on obtient $\mathrm{Ext}_A^{n-i}(M,A) = 0$ d'où $\mathrm{H}_\sigma^i(M) = 0$. □

Lemme 4.16. *Soit J un idéal à gauche de A. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(1) $\mathrm{Hom}_A(A/J, V(\mathfrak{g})) \neq 0$,

(2) *J est contenu dans un idéal cofini (propre).*

Preuve. (1) Soient φ un élément non nul de $\mathrm{Hom}_A(A/J, V(\mathfrak{g}))$, $\bar{1}$ la classe de 1 dans A/J et soit $f = \varphi(\bar{1})$. On a $J \cdot \varphi(\bar{1}) = \varphi(J \cdot \bar{1}) = 0$ d'où $f(J) = 0$; mais il existe I cofini tel que $f(I) = 0$; on a donc $f(I + J) = 0$; comme f est non nulle on a donc $I = J \neq A$.

(2) Supposons J contenu dans un idéal cofini propre, alors J est contenu dans un idéal maximal cofini $\mathfrak{m}$. On a

$$V(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{\substack{P \in \mathrm{Spec}\, A \\ \mathrm{ht}\, P = n}} E_A(A/P).$$

Comme $\mathfrak{m}$ est premier de hauteur n, il suffit de composer la surjection canonique $A/J \to A/\mathfrak{m}$ avec l'injection $A/\mathfrak{m} \to V(\mathfrak{g})$; on obtient $\mathrm{Hom}_A(A/J, V(\mathfrak{g})) \neq 0$. □

Corollaire 4.17. *Soit M un A-module à gauche de type fini et s un entier ≥ 0. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(1) $H_\sigma^s(M) \neq 0$,

(2) *il existe un élément $x \in \mathrm{Ext}_A^{n-s}(M, A)$ dont l'annulateur est contenu dans un idéal cofini propre.*

Preuve. D'après 4.14 la propriété $H_\sigma^s(M) \neq 0$ est équivalente à

$$\mathrm{Hom}_A[\mathrm{Ext}_A^{n-s}(M, A), V(\mathfrak{g})] \neq 0.$$

Comme le A-module à gauche $V(\mathfrak{g})$ est injectif, ceci équivaut à l'existence d'un élément $x \in \mathrm{Ext}_A^{n-s}(M, A)$ tel que $\mathrm{Hom}_A(Ax, V(\mathfrak{g})) \neq 0$. Il suffit alors d'utiliser 4.16. □

Proposition 4.18. *Soit M un A-module à gauche de type fini et i un entier ≥ 0, alors les modules à gauche $H_\sigma^i(M)$ et $\mathrm{Tor}_{n-i}^A(V(\mathfrak{g}), M)$ sont isomorphes.*

Preuve. En utilisant [3, Ch. II, Proposition 4.14], et par un passage à la limite directe, on obtient l'isomorphisme de $H_\sigma^i(M)$ et $\mathrm{Tor}_{n-i}^A[V(\mathfrak{g}), M]$ en tant que groupes. Montrons qu'ils sont isomorphes en tant que modules à gauche. Le foncteur $H_\sigma^n : {}_A\mathbf{Mod} \to {}_A\mathbf{Mod}$ est additif covariant exact à droite. D'après 4.13 ses foncteurs dérivées sont les H_σ^{n-i}.

Nous allons montrer qu'il existe une équivalence naturelle entre les foncteurs ${}_A\mathbf{Mod}^{\mathrm{f}} \Rightarrow {}_A\mathbf{Mod}$ suivants:

$$E \otimes_A - \quad \text{et} \quad H_\sigma^n(-).$$

Alors on a $H_\sigma^{n-i}(A) = 0$ pour $i > 0$, car A est intègre et on a aussi $\mathrm{Tor}_i^A(E, A) = 0$ pour $i > 0$. Donc on a

$$H_\sigma^{n-i}(L) = \mathrm{Tor}_i^A(E, L) = 0$$

pour tout $i > 0$ et tout A-module libre de type fini.

D'après la propriété universelle des suites connexes de foncteurs de ${}_A\mathbf{Mod}^{\mathrm{f}}$ dans ${}_A\mathbf{Mod}$, les foncteurs $\mathrm{Tor}_i^A(E, -)$ et $H_\sigma^{n-i}(-)$, $i \geq 0$, sont isomorphes.

Il suffit donc de prouver que $H_\sigma^n(-)$ et $H_\sigma^n(A) \otimes_A -$ sont équivalents.

Soit M un A-module à gauche, on définit

$$\beta : H_\sigma^n(A) \times M \to H_\sigma^n(M)$$

de la manière suivante: $\alpha \in H_\sigma^n(A)$, $x \in M$, on note $\delta_x : A \to M$ l'application $\delta_x(1) = x$; c'est un A-homomorphisme. Donc

$$H_\sigma^n(\delta_x) : H_\sigma^n(A) \to H_\sigma^n(M)$$

est un A-homomorphisme et on pose

$$\beta(\alpha, x) = H^n_\sigma(\delta_x)(\alpha),$$

β est évidemment bi-additive.

Vérifions que $\beta(\alpha r, x) = \beta(\alpha, rx)$ pour tout $r \in A$. Pour cela il suffit de vérifier que pour chaque $I \in \mathscr{F}$ l'application:

$$B : \mathrm{Ext}^n_A(A/I, A) \times M \to \mathrm{Ext}^n_A(A/I, M)$$
$$(\alpha, x) \mapsto \mathrm{Ext}^n_A(\delta_x)(\alpha)$$

satisfait à $B(\alpha r, x) = B(\alpha, rx)$; on a

$$B(\alpha, rx) = \mathrm{Ext}^n_A(\delta_{rx})(\alpha)$$

où $\delta_{rx} : A \to M$ est le A-homomorphisme $\delta_{rx}(1) = rx$. Soit $\bar{\delta}_r : A \to A$ l'application définie par

$$\bar{\delta}_r(z) = zr.$$

On a $\delta_{rx} = \delta_x \circ \bar{\delta}_r$; en effet soit $z \in A$, $\delta_{rx}(z) = z(rx)$ et $\delta_x(\bar{\delta}_r(z)) = \delta_x(zr) = (zr)x$. Donc

$$\mathrm{Ext}^n_A(\delta_{rx}) = \mathrm{Ext}^n_A(\delta_x) \circ \mathrm{Ext}^n_A(\bar{\delta}_r).$$

D'où $B(\alpha, rx) = \mathrm{Ext}^n_A(\delta_x)$ $[\mathrm{Ext}^n_A(\bar{\delta}_r)(\alpha)]$. Mais $\mathrm{Ext}^n_A(\bar{\delta}_r)(\alpha)$ est l'homomorphisme de A-modules à droite

$$\mathrm{Ext}^n_A(A/I, A)_A \to \mathrm{Ext}^n_A(A/I, A)_A$$
$$\alpha \mapsto \alpha r.$$

Donc $\mathrm{Ext}^n_A(\delta_{rx})(\alpha) = \mathrm{Ext}^n_A(\delta_x)(\alpha r) = B(\alpha r, x)$. □

Références

[1] G. Barou, Cohomologie locale des algèbres enveloppantes d'algèbres de Lie nilpotentes, Lecture Notes in Math. 641 (Springer, Berlin) 252–280.

[2] G. Barou, Cohomologie locale d'algèbres de Lie nilpotentes, Thèse de 3ème cycle, Université P. et M. Curie.

[3] J.E. Björk, Rings of Differential Operators (North-Holland, Amsterdam, 1979).

[4] M. Boratynski, A change of rings theorem and the Artin–Rees Property. Proc. Amer. Math. Soc. 53, (2) (1975).

[5] W. Bohro, P. Gabriel and R. Rentschler, Primideale in Einhüllenden auflösbarer Lie-Algebren, Lecture Notes in Math. 357 (Springer, Berlin).

[6] K.A. Brown, Localisation, bimodules and injective modules for enveloping algebras of solvable Lie algebras, Bull. Sci. Math. 107 (3) (1983) 225–251.

[7] K.A. Brown, Modules extensions over Noetherian Rings, J. Algebra 69 (2) (1981) 247–260.

[8] H. Cartan and S. Eilenberg, Homological Algebra (Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1956).

[9] J. Dixmier, Algèbres Enveloppantes (Gauthier Villars, Paris, 1974).

[10] O. Goldman, Rings and modules of quotients, J. Algebra 13 (1969) 10–47.

[11] R. Hartshorne, Local Cohomology, Lecture Notes in Math. 41 (Springer, Berlin).

[12] J.L. Koszul, Sur les modules de représentations des algèbres de Lie résolubles, Amer. J. Math. 76 (1954) 435–554.

[13] J. Lambeck and C. Michler, The torsion theory at a prime ideal of a right noetherian ring, J. Algebra 25, (2)(1973) 364–389.

[14] Th Levasseur, Idéaux premiers et complétions dans les algèbres enveloppantes d'algèbres de Lie nilpotentes, Séminaire d'algèbre Dubreil-Malliavin, Lecture Notes in Math. 795 (Springer, Berlin) 116–160.

[15] M.P. Malliavin, Modules sans torsion et modules injectifs sur les algèbres de Lie résolubles, J. Algebra 83 (1) (1983) 126–157.

[16] E. Matlis, Injective modules over noetherian rings, Pacific J. Math. 8 (1958) 511–528.

[17] D.G. Northcott, Injective envelopes over polynomials, J. London Math. Soc. 8 (1974) 290–296.

[18] Y. Nouazé and P. Gabriel, Idéaux premiers de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie nilpotente, J. Algebra 6 (1967) 77–99.

[19] D.W. Sharpe and P. Vamos, Injective Modules, Cambridge Tracts in Math. and Physics 62 (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1972).

[20] P. Tauvel, Sur les quotients premiers de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie résoluble, Bull. Soc. Math. France 106 (1978) 177–205.

[21] S. Yammine, Les théorèmes de Cohen–Seidenberg en algèbre non commutative, Séminaire d'algèbre Paul Dubreil 1977/78, Lecture Notes in Math. 740 (Springer, Berlin) 120–169.